

SULLE ORIGINI DEI LOGARITMI E DELLA COSTANTE “ e ”

Analisi storica sulla nascita e sul significato della costante “ e ”

Mario Marobin
Aprile 2015

| | |
|---|----|
| PREMESSA..... | 2 |
| NEPERO E LA NASCITA DEI LOGARITMI | 2 |
| IL MODELLO CINEMATICO | 4 |
| LA PRIMA TABELLA | 4 |
| LA SECONDA TABELLA | 6 |
| LA TERZA TABELLA | 7 |
| LA TABELLA RIDOTTA..... | 10 |
| LE TAVOLE DEI LOGARITMI..... | 11 |
| LA BASE $1/e$ DI NEPERO..... | 13 |
| LE BASI NORMALIZZATE A 1 | 15 |
| LA COSTANTE e | 16 |
| CONCLUSIONI | 18 |

PREMESSA

Il numero irrazionale e trascendente $e=2,71828 \dots$ non può non destare la curiosità di un attento osservatore perché ricorre molto spesso in numerose leggi che disciplinano fenomeni fisici, chimici, biologici e altro. Ne sono esempi la scarica di un condensatore elettrico, lo smorzamento di una oscillazione meccanica, il decadimento radioattivo di una sostanza, la dipendenza dalla temperatura della costante di velocità di una reazione chimica, l'incremento demografico di una popolazione, la distribuzione normale di probabilità e così via. Mentre per altri numeri irrazionali notevoli, come π -greco e radice di due, abbiamo un immediato riscontro geometrico il nostro "e" viene dai più preso come dato di fatto senza alcuna introspezione.

Ci proponiamo pertanto con questa memoria di fare un salto a ritroso a cavallo fra il XVI e il XVII secolo per analizzare le condizioni che hanno portato alla definizione della costante "e" attraverso i logaritmi anche se l'autore, Nepero, non se ne rese conto. Solo diversi decenni dopo la morte di Nepero, Huygens, Jakob Bernoulli e Leibniz, elaborarono la notazione esponenziale e il logaritmo come funzione inversa, con il numero "e" identificato come la porzione di area unitaria sottostante una iperbole equilatera (è unitaria l'area sotto $xy=1$ compresa fra $x=1$ e $x=e$). Nei paragrafi che seguono analizzeremo pertanto parte del percorso che ha portato Nepero a pubblicare, nel 1614 e 1618, le due opere "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" e "Mirifici logarithmorum canonis constructio" sui logaritmi a base $1/e$.

NEPERO E LA NASCITA DEI LOGARITMI

John Napier nasce in Scozia nel 1550 e inizia a frequentare la St Andrews University nel 1563 senza tuttavia mai completarne gli studi. Gira per l'Europa fino a stabilirsi definitivamente nel 1574 ad amministrare i suoi vasti possedimenti terrieri a Gartness in Scozia. La matematica era per lui solo un passatempo. A quel tempo la trigonometria era sviluppata quasi nella forma a noi oggi nota ed era molto utilizzata per la cartografia e i calcoli astronomici. La precisione dei calcoli trigonometrici si spingeva fino all'uso di sette cifre significative nelle tavole dei seni/coseni con evidente laboriosità nelle corrispondenti moltiplicazioni.

Verso il 1590 Nepero viene a conoscenza delle allora recenti formule di prostaferesi, elaborate presso l'osservatorio astronomico danese di Tycho Brahe, che trasformano il prodotto di due seni/coseni nella somma di corrispondenti funzioni riducendo enormemente la laboriosità dei calcoli.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Da qui parte il proposito di Nepero di perfezionare un metodo più esteso per la semplificazione dei calcoli trigonometrici che si completerà, dopo oltre vent'anni, con la pubblicazione delle sue opere sui già citati "Mirifici logarithmorum".

Sempre al tempo era noto che sommare gli esponenti di potenze con la medesima base equivaleva alla moltiplicazione delle corrispondenti potenze. Per Nepero la moderna notazione esponenziale e il concetto di logaritmo come funzione inversa era ancora tutto da inventare ma il suo lavoro parte proprio dalla corretta sincronizzazione fra una progressione geometrica e una aritmetica come nell'esempio riportato nello schema che segue.

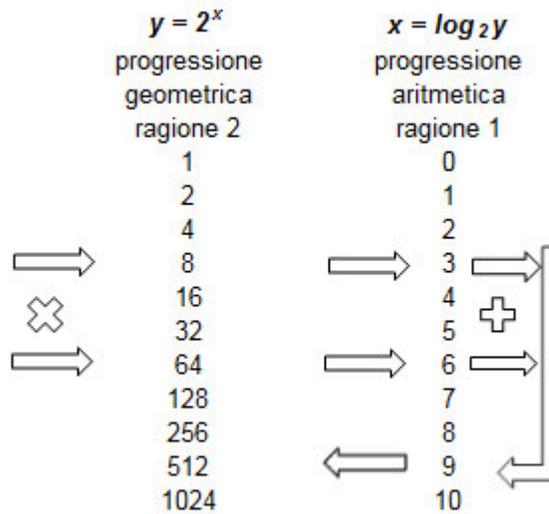


Fig. 1 – Il risultato della moltiplicazioni $8 \times 64 = 512$ si desume dalla somma degli indicatori della corrispondente progressione aritmetica.

Poiché le funzioni trigonometriche variano fra 1 e 0 riproponiamo in figura 2 lo schema di figura 1 con una progressione geometrica a valori decrescenti ottenuta con una ragione minore di 1.

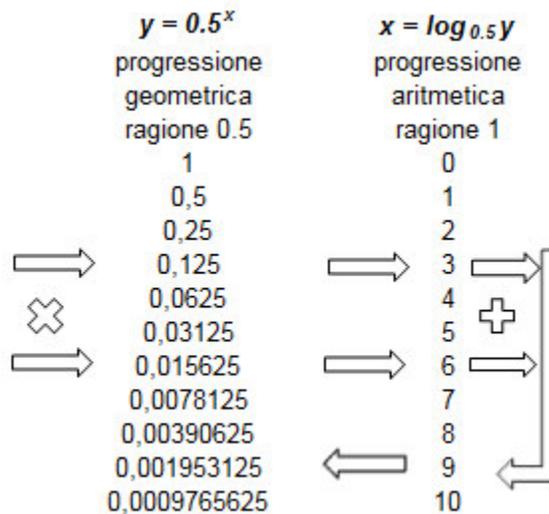


Fig. 2 – Il risultato della moltiplicazioni $0.125 \times 0.015625 = 0.001953125$ si desume dalla somma degli indicatori della corrispondente progressione aritmetica.

IL MODELLO CINEMATICO

Il lavoro di Nepero inizia con le definizioni di progressione aritmetica e geometrica intese ciascuna come il moto di un punto che si sposta su un segmento. Più precisamente:

- Def.1: Una linea cresce aritmeticamente quando il punto mobile che la costruisce aggiunge sempre la medesima quantità in intervalli di tempo uguali [Nepero, 1614]
- Def.2: Una linea decresce geometricamente quando il punto mobile che la percorre taglia via a sinistra, in tempi uguali, una quantità che è sempre la stessa proporzione di quanto rimane da percorrere a destra [Nepero, 1614]

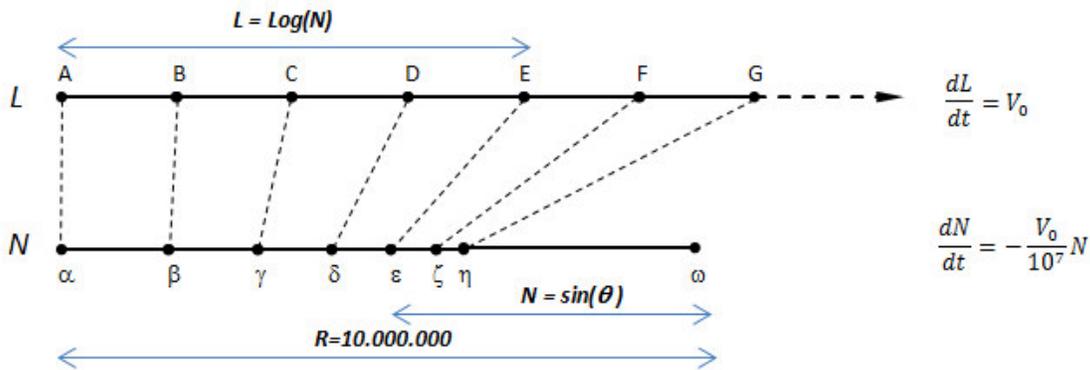


Fig. 3 – Rappresentazione della progressione aritmetica e geometrica secondo Nepero.

Con riferimento alla figura 3 negli stessi istanti nei quali il punto mobile L , che si sposta a velocità costante V_0 , tocca i punti B, C, D, E, \dots il punto mobile N tocca a velocità decrescente i corrispondenti punti $\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$. La velocità del punto N è, in ogni istante, a meno di un fattore di normalizzazione $V_0/10^7$, uguale alla distanza N dal punto di arresto finale ω . In questo modo la velocità iniziale su α è V_0 e quella finale su ω nulla.

La progressione geometrica che nelle intenzioni di Nepero dovrebbe rappresentare i valori del seno di un arco non può avere una “risoluzione” larga come quella mostrata nell’esempio di figura 2 e, pertanto, decide di assegnare alla stessa una ragione quanto più vicina possibile a 1 con un valore pari a $0,9999999 = 1 - 10^{-7}$. A quel punto per semplificazione di scrittura introduce un fattore di scala assegnando il valore di 10^7 al raggio della circonferenza trigonometrica. $L(N)$ è la simbologia che adotteremo per i logaritmi di Nepero del 1614 che iniziano con $L(10^7)=0$ in corrispondenza del seno di 90° . Le notazioni differenziali aggiunte in figura 3 per le velocità dei due punti L e N erano ovviamente sconosciute all’epoca.

LA PRIMA TABELLA

Nepero parte quindi con la costruzione di una prima progressione geometrica composta da 101 elementi a_i mostrati nella seconda colonna della figura 4 che decrescono partire da 10^7 . E’ interessante notare che per il calcolo degli elementi Nepero utilizza un artificio che gli evita le moltiplicazioni per $0,9999999$ perché con

$$a_{i+1} = a_i 0,9999999 = a_i (1 - 10^{-7}) = a_i - a_i 10^{-7}$$

$$\pi\alpha = S-R = (R^2/N)-R = (R-N)R/N = (10^7 - N)10^7/N$$

$$\alpha\beta = R-N = 10^7 - N$$

Il logaritmo di N risulta pertanto delimitato tra

$$(10^7 - N) \frac{10^7}{N} > L(N) > 10^7 - N \quad (1)$$

che per $N = 9999999$ diventa $1,0000001 > L(N) > 1$. Nepero assegna pertanto la media $1,00000005$ fra i due estremi come ragione della progressione aritmetica $L_1(a_i)$ riportata nella colonna 3 della tabella di figura 4. Per costruzione la relazione (1) perde ovviamente significato allontanandosi da 10^7 . Ad esempio per $x=9.000.000$ la tolleranza di $L(N)$ supera il 10%.

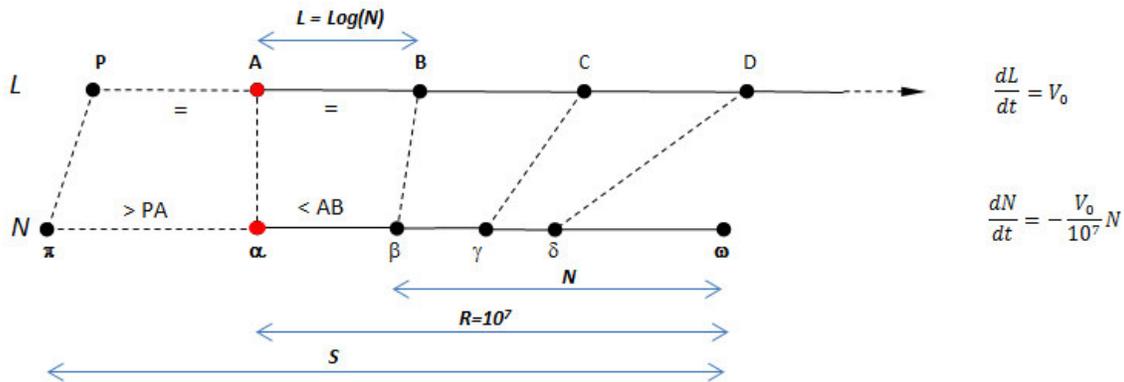


Fig. 5 – Rappresentazione della progressione aritmetica e geometrica secondo Nepero.

A completamento della figura 4 si fa notare, come esempio, che $a_3 \times a_6 = a_9$ perché $L_1(a_3) + L_1(a_6) = L_1(a_9)$. Le parentesi graffe a fianco della tabella indicano esempi di un'altra importante proprietà dei logaritmi che Nepero definisce come:

– Art.36: *Logaritmi equidistanti sono di seni in proporzione* [Nepero, 1619] (2)

che spieghiamo con l'esempio di $a_{15}/a_{12}=0,9999997$ associato a $L_1(a_{15}) - L_1(a_{12})=3,00000015$. Indipendentemente dalle posizioni nelle tabelle altri due qualsiasi elementi equidistanti di tre posizioni forniranno gli stessi risultati come a_{23}/a_{20} con $L_1(a_{23}) - L_1(a_{20})$.

LA SECONDA TABELLA

Nella prima tabella che copre solamente un arco $0,25^\circ$ il rapporto a_{100}/a_0 vale, con buona approssimazione, $0,99999=1-10^{-5}$. Con questo valore Nepero costruisce allora una seconda progressione geometrica composta da 51 elementi b_i mostrati nella seconda colonna della figura 6.

| i | $b_{i+1}=b_i(1-10^{-5})$ | $L_2(b_i)$ |
|-----|--------------------------|---------------|
| 0 | 10.000.000,0000000 | 0,0000000 |
| 1 | 9.999.900,0000000 | 100,0005000 |
| 2 | 9.999.800,0010000 | 200,0010000 |
| 3 | 9.999.700,0030000 | 300,0015000 |
| 4 | 9.999.600,0060000 | 400,0020000 |
| 5 | 9.999.500,0099999 | 500,0025000 |
| 6 | 9.999.400,0149998 | 600,0030000 |
| 7 | 9.999.300,0209997 | 700,0035000 |
| 8 | 9.999.200,0279994 | 800,0040000 |
| 9 | 9.999.100,0359992 | 900,0045000 |
| 10 | 9.999.000,0449988 | 1.000,0050000 |
| 11 | 9.998.900,0549984 | 1.100,0055000 |
| 12 | 9.998.800,0659978 | 1.200,0060000 |
| 13 | 9.998.700,0779972 | 1.300,0065000 |
| 14 | 9.998.600,0909964 | 1.400,0070000 |
| 15 | 9.998.500,1049955 | 1.500,0075000 |
| 16 | 9.998.400,1199944 | 1.600,0080000 |
| 17 | 9.998.300,1359932 | 1.700,0085000 |
| 18 | 9.998.200,1529919 | 1.800,0090000 |
| 19 | 9.998.100,1709903 | 1.900,0095000 |
| 20 | 9.998.000,1899886 | 2.000,0100000 |
| 21 | 9.997.900,2099867 | 2.100,0105000 |
| ... | | |
| ... | | |
| 48 | 9.995.201,1278271 | 4.800,0240000 |
| 49 | 9.995.101,1758158 | 4.900,0245000 |
| 50 | 9.995.001,2248040 | 5.000,0250000 |

| | |
|--------------------|----|
| 10.000.000,0000000 | -- |
| 100,0000000 | = |
| 9.999.900,0000000 | -- |
| 99,9990000 | = |
| 9.999.800,0010000 | -- |
| 99,9980000 | = |
| 9.999.700,0030000 | -- |
| 99,9970000 | = |
| 9.999.600,0060000 | -- |

Fig. 6 – Seconda tabella di Nepero con, a destra, lo schema per il calcolo degli elementi b_i

La risoluzione questa volta è cento volte più grossolana e copre i valori dei seni di archi compresi fra 90° e $88,19^\circ$. Si evidenzia ancora il fatto che per il calcolo degli elementi b_i Nepero utilizza il solito artificio che gli evita le moltiplicazioni per 0,99999. Per trovare la ragione della corrispondente progressione aritmetica $L_2(b_i)$ Nepero non utilizza più la relazione (1) ma dimostra, con motivazioni analoghe, che la differenza di due logaritmi x, y , con $x < y$, è delimitata fra:

$$10^7 \frac{y-x}{x} > L(x) - L(y) > 10^7 \frac{y-x}{y} \quad (3)$$

Con questa relazione si trova $0,00049505505302 > L_2(b_1) - L_1(a_{100}) > 0,00049505505300$. Vista la trascurabile differenza Nepero prende il valore 0,000495 e lo somma a $L_1(a_{100})$ per assegnare il valore risultante 100,0005 come ragione della nuova progressione aritmetica $L_2(b_i)$.

LA TERZA TABELLA

Nella seconda tabella che copre un arco $1,81^\circ$ il rapporto b_{50}/b_0 vale, con buona approssimazione, 0,9995. Con questo valore Nepero costruisce allora la terza progressione geometrica composta da 69 sottotabelle

contenenti ciascuna 21 elementi $c_{i,j}$ mostrati nella seconda colonna di ciascuna sottotabella. La figura 7 mostra le prime tre e l'ultima di queste sottotabelle che nell'insieme costituiscono la terza tabella, o tabella radicale, di Nepero con $69 \times 21 = 1449$ elementi $c_{i,j}$. E' subito da notare che l'ultima sottotabella con $c_{20,68} = 4.998.609$ rappresenta il seno di $29,99^\circ$. La terza tabella radicale copre pertanto con 1449 elementi un arco di circa 60° .

| i | $c_{i+1,0} = 0,9995c_{i,0}$ | $L_3(c_{i,0})$ |
|----|-----------------------------|----------------|
| 0 | 10.000.000,0000000 | 0,00 |
| 1 | 9.995.000,0000000 | 5.001,25 |
| 2 | 9.990.002,5000000 | 10.002,50 |
| 3 | 9.985.007,4987500 | 15.003,75 |
| 4 | 9.980.014,9950006 | 20.005,00 |
| 5 | 9.975.024,9875031 | 25.006,25 |
| 6 | 9.970.037,4750094 | 30.007,50 |
| 7 | 9.965.052,4562719 | 35.008,75 |
| 8 | 9.960.069,9300437 | 40.010,00 |
| 9 | 9.955.089,8950787 | 45.011,25 |
| 10 | 9.950.112,3501312 | 50.012,50 |
| 11 | 9.945.137,2939561 | 55.013,75 |
| 12 | 9.940.164,7253091 | 60.015,00 |
| 13 | 9.935.194,6429465 | 65.016,26 |
| 14 | 9.930.227,0456250 | 70.017,51 |
| 15 | 9.925.261,9321022 | 75.018,76 |
| 16 | 9.920.299,3011361 | 80.020,01 |
| 17 | 9.915.339,1514856 | 85.021,26 |
| 18 | 9.910.381,4819098 | 90.022,51 |
| 19 | 9.905.426,2911689 | 95.023,76 |
| 20 | 9.900.473,5780233 | 100.025,01 |

| i | $c_{i+1,1} = 0,9995c_{i,1}$ | $L_3(c_{i,1})$ |
|----|-----------------------------|----------------|
| 0 | 9.900.000,0000000 | 100.503,36 |
| 1 | 9.895.050,0000000 | 105.504,61 |
| 2 | 9.890.102,4750000 | 110.505,86 |
| 3 | 9.885.157,4237625 | 115.507,11 |
| 4 | 9.880.214,8450506 | 120.508,36 |
| 5 | 9.875.274,7376281 | 125.509,61 |
| 6 | 9.870.337,1002593 | 130.510,86 |
| 7 | 9.865.401,9317092 | 135.512,11 |
| 8 | 9.860.469,2307433 | 140.513,36 |
| 9 | 9.855.538,9961279 | 145.514,61 |
| 10 | 9.850.611,2266299 | 150.515,86 |
| 11 | 9.845.685,9210166 | 155.517,11 |
| 12 | 9.840.763,0780560 | 160.518,36 |
| 13 | 9.835.842,6965170 | 165.519,61 |
| 14 | 9.830.924,7751688 | 170.520,86 |
| 15 | 9.826.009,3127812 | 175.522,11 |
| 16 | 9.821.096,3081248 | 180.523,37 |
| 17 | 9.816.185,7599707 | 185.524,62 |
| 18 | 9.811.277,6670907 | 190.525,87 |
| 19 | 9.806.372,0282572 | 195.527,12 |
| 20 | 9.801.468,8422431 | 200.528,37 |

| i | $c_{i+1,2} = 0,9995c_{i,2}$ | $L_3(c_{i,2})$ |
|----|-----------------------------|----------------|
| 0 | 9.801.000,0000000 | 201.006,70 |
| 1 | 9.796.099,5000000 | 206.007,95 |
| 2 | 9.791.201,4502500 | 211.009,20 |
| 3 | 9.786.305,8495249 | 216.010,45 |
| 4 | 9.781.412,6966001 | 221.011,70 |
| 5 | 9.776.521,9902518 | 226.012,95 |
| 6 | 9.771.633,7292567 | 231.014,20 |
| 7 | 9.766.747,9123921 | 236.015,45 |
| 8 | 9.761.864,5384359 | 241.016,70 |
| 9 | 9.756.983,6061667 | 246.017,95 |
| 10 | 9.752.105,1143636 | 251.019,20 |
| 11 | 9.747.229,0618064 | 256.020,45 |
| 12 | 9.742.355,4472755 | 261.021,70 |
| 13 | 9.737.484,2695518 | 266.022,96 |
| 14 | 9.732.615,5274171 | 271.024,21 |
| 15 | 9.727.749,2196534 | 276.025,46 |
| 16 | 9.722.885,3450435 | 281.026,71 |
| 17 | 9.718.023,9023710 | 286.027,96 |
| 18 | 9.713.164,8904198 | 291.029,21 |
| 19 | 9.708.308,3079746 | 296.030,46 |
| 20 | 9.703.454,1538206 | 301.031,71 |

| i | $c_{i+1,68} = 0,9995c_{i,68}$ | $L_3(c_{i,68})$ |
|----|-------------------------------|-----------------|
| 0 | 5.048.858,8878710 | 6.834.228,40 |
| 1 | 5.046.334,4584271 | 6.839.229,65 |
| 2 | 5.043.811,2911979 | 6.844.230,90 |
| 3 | 5.041.289,3855523 | 6.849.232,15 |
| 4 | 5.038.768,7408595 | 6.854.233,40 |
| 5 | 5.036.249,3564891 | 6.859.234,65 |
| 6 | 5.033.731,2318108 | 6.864.235,90 |
| 7 | 5.031.214,3661949 | 6.869.237,15 |
| 8 | 5.028.698,7590118 | 6.874.238,40 |
| 9 | 5.026.184,4096323 | 6.879.239,65 |
| 10 | 5.023.671,3174275 | 6.884.240,90 |
| 11 | 5.021.159,4817688 | 6.889.242,15 |
| 12 | 5.018.648,9020279 | 6.894.243,40 |
| 13 | 5.016.139,5775769 | 6.899.244,66 |
| 14 | 5.013.631,5077881 | 6.904.245,91 |
| 15 | 5.011.124,6920342 | 6.909.247,16 |
| 16 | 5.008.619,1296882 | 6.914.248,41 |
| 17 | 5.006.114,8201233 | 6.919.249,66 |
| 18 | 5.003.611,7627133 | 6.924.250,91 |
| 19 | 5.001.109,9568319 | 6.929.252,16 |
| 20 | 4.998.609,4018535 | 6.934.253,41 |

Fig. 7 – Sottotabelle 0, 1, 2 e 68 della Terza tabella di Nepero,

Nepero si ferma alla 69-esima tabella (seno di 29,99°) perché, pur non conoscendo la funzione logaritmica, si accorge dell'andamento asintotico dei suoi calcoli al decrescere del numero N (figura 8). Per il completamento dei dati fino a N=0 seguirà allora un diverso approccio con una tabella ridotta che vedremo nel prossimo paragrafo.

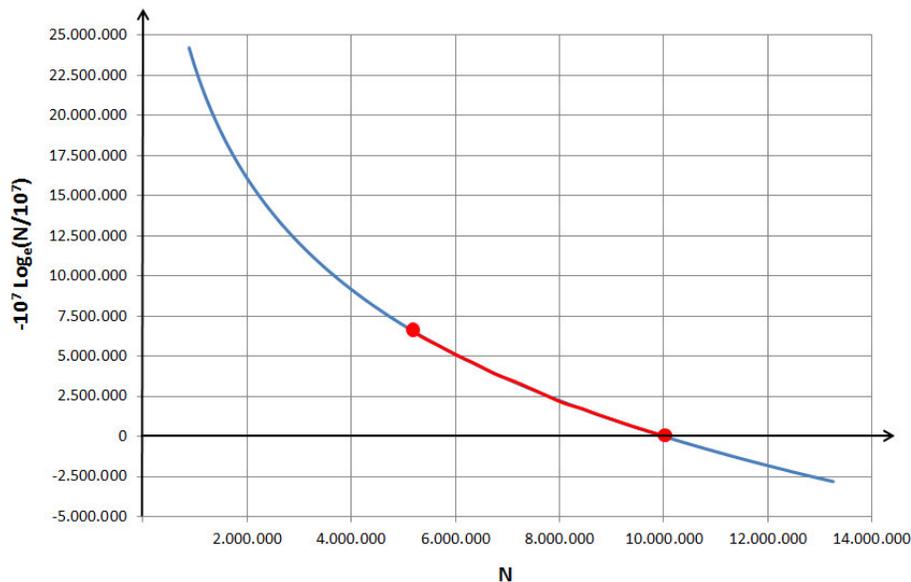


Fig. 8 – Tabella 3 di Nepero riportata, in rosso, sopra la corrispondente funzione logaritmica.

Dalle sottotabelle di figura 7 abbiamo $c_{0,1}/c_{0,0}=c_{0,2}/c_{0,1}=0,99=1-10^{-2}$. Questo vale per qualsiasi altro elemento della seconda colonna di ciascuna sottotabella se rapportato al corrispondente elemento della precedente sottotabella. Questo è l'artificio escogitato da Nepero per calcolare i 1449 elementi della progressione aritmetica con una successione di divisioni per 100 con sottrazione al posto di ben più laboriose moltiplicazioni per 0,9995.

In altre parole Nepero arrivato all'elemento $c_{20,0}$ dopo 20 moltiplicazioni per 0,9995 si arresta. Continua poi a gruppi di 21 elementi deducendo ciascun valore dal corrispondente della precedente sottotabella come moltiplicazione per 0,99. In simboli $c_{i,j+1} = 0,99c_{i,j}=(1-10^{-2})c_{i,j}$ con j indice di sottotabella 0, 1, 2 . . . 68 e i indice di elemento 0, 1, 2 . . . 20. E' facile verificare oggi con un foglio elettronico che se Nepero avesse costruito la terza tabella con 1449 elementi consecutivi senza spezzarli in 69 sottotabelle avrebbe ottenuto dei logaritmi più precisi; la laboriosità dei calcoli lo ha indotto ad escogitare questo stratagemma che assicura comunque una sufficiente precisione dei corrispondenti logaritmi.

Come già visto per la tabella 2 la ragione della corrispondente progressione aritmetica da associare si trova con la relazione (3) mettendo a confronto l'ultimo elemento b_{50} della tabella 2 con il secondo elemento $c_{1,0}$ della terza tabella. Inserendo i valori abbiamo $1,22541675 > L_3(c_{1,0}) - L_2(b_{50}) > 1,22541660$ che aggiunti come media al logaritmo $L_2(b_{50})$ forniscono il valore 5001,250416 per $L_3(c_{1,0})$ che consente, per somme successive, di completare la terza colonna della sottotabella 0.

Il primo elemento aritmetico della sottotabella 1 si determina ancora con la relazione (3) perché non è equidistante dall'ultimo elemento della sottotabella 0 a causa dello 0,99 scelto per la semplificazione dei calcoli.

Passando ai valori abbiamo $478,361639 > L_3(c_{0,1}) - L_3(c_{20,0}) > 478,338757$ che aggiunti come media al logaritmo $L_3(c_{20,0})$ forniscono il valore $100.503,358531$ da utilizzare, omologamente allo 0,99, per il completamento delle restanti sottotabelle senza ricalcolare i nuovi limiti per l'inizio di ciascuna delle restanti 67 sottotabelle. In simboli $L_3(c_{i,j+1}) = L_3(c_{i,j}) + 100.503,358531$ con j indice di sottotabella 1,2,3 . . . 68 e i indice di elemento 0, 1, 2 . . . 20.

LA TABELLA RIDOTTA

Per il completamento dei logaritmi dei seni minori di 30° Nepero costruisce una tabella aggiuntiva che, al posto di progressioni geometriche e aritmetiche, usa rapporti notevoli di seni con corrispondenti differenze di logaritmi. In questo modo in base alla definizione (2) e alla relazione (3) risulta possibile calcolare il logaritmo di un seno piccolo in modo mirato invece di accedere ad una ipotetica terza tabella estesa al di sotto dei 30° . La tabella ridotta si basa sui logaritmi di 5.000.000 e 8.000.000 ricavabili come:

$$\begin{aligned} 2.219,91 > L(5.000.000) - L_3(c_{19,68}) > 2.219,42 &\rightarrow L(5.000.000) = 6.931.471,83 \\ 356,63 > L(8.000.000) - L_3(c_{4,22}) > 356,62 &\rightarrow L(8.000.000) = 2.231.435,53 \end{aligned}$$

Si fa notare che i valori numerici esposti differiscono leggermente da quelli riportati nella letteratura di riferimento a causa della maggior precisione di calcolo dei moderni fogli elettronici. Per la costruzione della tabella ridotta Nepero riporta:

- Art.51: Tutti i seni in proporzione duplicata hanno 6.931.469,22 come differenza dei loro logaritmi [Nepero, 1619] (4)
- Art.52: Tutti i seni in proporzione decuplicata hanno 23.025.843,34 come differenza dei loro logaritmi [Nepero, 1619] (5)

che si desumono come:

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 10^6}{10^7} = \frac{1}{2} &\rightarrow L(5 \cdot 10^6) = 6.931.471,83 = A \\ \frac{2,5 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} = \frac{1}{2} &\rightarrow L(2,5 \cdot 10^6) - L(5 \cdot 10^6) = A \rightarrow L(2,5 \cdot 10^6) = A + L(5 \cdot 10^6) = 2A \\ \frac{1,25 \cdot 10^6}{2,5 \cdot 10^6} = \frac{1}{2} &\rightarrow L(1,25 \cdot 10^6) - L(2,5 \cdot 10^6) = A \rightarrow L(1,25 \cdot 10^6) = A + L(2,5 \cdot 10^6) = 3A \\ \frac{10^6}{8 \cdot 10^6} = \frac{1}{8} &\rightarrow L(10^6) - L(8 \cdot 10^6) = 3A \rightarrow L(10^6) = 3A + L(8 \cdot 10^6) \\ \frac{10^6}{10^7} = \frac{1}{10} &\rightarrow L(10^6) - L(10^7) = L(10^6) \rightarrow L(10^6) = 3A + L(8 \cdot 10^6) = 23.025.851,02 = B \end{aligned}$$

La figura 9 riporta la tabella ridotta di Nepero, costruita a partire dai logaritmi A e B, secondo le relazioni riportate nella terza colonna.

| Rapporto numeri (seni) | Corrispondente differenza dei logaritmi | A=L(5.000.000) B=3A+L(8.000.000) |
|------------------------|---|-------------------------------------|
| 1 : 2 | 6.931.471,83 | A |
| 1 : 4 | 13.862.943,66 | 2A |
| 1 : 8 | 20.794.415,49 | 3A |
| 1 : 10 | 23.025.851,02 | B |
| 1 : 20 | 29.957.322,85 | A+B |
| 1 : 40 | 36.888.794,68 | 2A+B |
| 1 : 80 | 43.820.266,51 | 3A+B |
| 1 : 100 | 46.051.702,04 | 2B |
| 1 : 200 | 52.983.173,87 | A+2B |
| 1 : 400 | 59.914.645,70 | 2A+2B |
| 1 : 800 | 66.846.117,53 | 3A+2B |
| 1 : 1.000 | 69.077.553,06 | 3B |
| 1 : 2.000 | 76.009.024,89 | A+3B |
| 1 : 4.000 | 82.940.496,72 | 2A+3B |
| 1 : 8.000 | 89.871.968,55 | 3A+3B |
| 1 : 10.000 | 92.103.404,08 | 4B |
| 1 : 20.000 | 99.034.875,91 | A+4B |
| 1 : 40.000 | 105.966.347,74 | 2A+4B |
| 1 : 80.000 | 112.897.819,57 | 3A+4B |
| 1 : 100.000 | 115.129.255,10 | 5B |
| 1 : 200.000 | 122.060.726,93 | A+5B |
| 1 : 400.000 | 128.992.198,76 | 2A+5B |
| 1 : 800.000 | 135.923.670,59 | 3A+5B |
| 1 : 1.000.000 | 138.155.106,12 | 6B |
| 1 : 2.000.000 | 145.086.577,95 | A+6B |
| 1 : 4.000.000 | 152.018.049,78 | 2A+6B |
| 1 : 8.000.000 | 158.949.521,61 | 3A+6B |
| 1 : 10.000.000 | 161.180.957,14 | 7B |

Fig. 9 – Tabella ridotta di Neper con le differenze di logaritmi come funzioni di A e B.

Come esempio di applicazione della tabella ridotta calcoliamo il logaritmo di $1^\circ 26'$ riportato in una pagina delle tavole dei logaritmi di Nepero mostrata in figura 10. Il seno 250137 viene moltiplicato per 2, 4, 8, 10, 20 . . . finché si arriva ad un numero che rientra nei limiti della tavola radicale. Nel nostro caso abbiamo $250137 \times 20 = 5.002.740$ per il quale si individua il logaritmo a mezzo della tabella radicale e media degli estremi forniti dalla relazione (3). Fatti i dovuti calcoli:

$$1742,57 > L(5.002.740) - L_3(c_{18,68}) > 1742,27$$

$$L(5.002.740) = L_3(c_{18,68}) + (1742,57 + 1742,27)/2 = 6.925.993,33$$

$$L(250137) = L(5.000.740) + \Delta(1:20) = 6.925.993,33 + 29.957.322,85 = 36.883.316,$$

otteniamo 36883316 come logaritmo di $\text{Sen}(1^\circ 26')$ che differisce leggermente da quello originale di Nepero (figura 10) a causa della maggior precisione del calcolo computerizzato.

LE TAVOLE DEI LOGARITMI

Nepero con il completamento delle tabelle radicale e ridotta procede al calcolo dei $90 \times 60 = 5400$ logaritmi dei seni da 0 a 90° di minuto primo in minuto primo utilizzando congiuntamente alle tabelle la relazione (3). Le conseguenti tavole dei logaritmi sono organizzate in pagine con sette colonne (figura 10).

| Gr. | I | | + | | - | |
|-----|--------|------------|-------------|------------|---------|----|
| I | Sinus | Logarithmi | Differentia | logarithmi | Sinus | |
| 0 | 174524 | 40482764 | 40481241 | 1523 | 9998477 | 60 |
| 1 | 177433 | 40317483 | 40315909 | 1574 | 9998426 | 59 |
| 2 | 180341 | 40154899 | 40153273 | 1626 | 9998374 | 58 |
| 3 | 183250 | 39994918 | 39993239 | 1679 | 9998321 | 57 |
| 4 | 186158 | 39837448 | 39835715 | 1733 | 9998267 | 56 |
| 5 | 189066 | 39682421 | 39680633 | 1788 | 9998212 | 55 |
| 6 | 191975 | 39529765 | 39527922 | 1843 | 9998157 | 54 |
| 7 | 194883 | 39379407 | 39377508 | 1899 | 9998101 | 53 |
| 8 | 197792 | 39231274 | 39229318 | 1956 | 9998044 | 52 |
| 9 | 200700 | 39085307 | 39083293 | 2014 | 9997986 | 51 |
| 10 | 203608 | 38941441 | 38939368 | 2073 | 9997927 | 50 |
| 11 | 206517 | 38799612 | 38797479 | 2133 | 9997867 | 49 |
| 12 | 209425 | 38659767 | 38657573 | 2194 | 9997806 | 48 |
| 13 | 212333 | 38521858 | 38519603 | 2255 | 9997745 | 47 |
| 14 | 215241 | 38385824 | 38383507 | 2317 | 9997683 | 46 |
| 15 | 218149 | 38251613 | 38249233 | 2380 | 9997620 | 45 |
| 16 | 221057 | 38119183 | 38116739 | 2444 | 9997556 | 44 |
| 17 | 223965 | 37988481 | 37985972 | 2509 | 9997491 | 43 |
| 18 | 226873 | 378592471 | 37856896 | 2575 | 9997425 | 42 |
| 19 | 229781 | 37732105 | 37729464 | 2641 | 9997359 | 41 |
| 20 | 232689 | 37606339 | 37603631 | 2708 | 9997292 | 40 |
| 21 | 235597 | 37482135 | 37479359 | 2776 | 9997224 | 39 |
| 22 | 238505 | 37359458 | 37356613 | 2845 | 9997155 | 38 |
| 23 | 241413 | 37238269 | 37235354 | 2915 | 9997085 | 37 |
| 24 | 244321 | 37118532 | 37115546 | 2986 | 9997014 | 36 |
| 25 | 247229 | 37000208 | 36997150 | 3058 | 9996943 | 35 |
| 26 | 250137 | 36883272 | 36880142 | 3130 | 9996871 | 34 |
| 27 | 253045 | 36767690 | 36764487 | 3203 | 9996798 | 33 |
| 28 | 255953 | 36653428 | 36650151 | 3277 | 9996724 | 32 |
| 29 | 258861 | 36540448 | 36537096 | 3352 | 9996649 | 31 |
| 30 | 261769 | 36428748 | 36425320 | 3428 | 9996573 | 30 |

88

Fig. 10 – Tavola dei logaritmi di Nepero da 1° 00' a 1° 30' [Nepero, 1614]

La prima colonna riporta l'arco trigonometrico in gradi e minuti primi con il corrispondente seno e logaritmo in seconda e terza colonna. La quinta e sesta colonna riportano logaritmo e il seno dell'arco complementare (90- α) trascritto nella settima colonna. In questo modo sulla stessa linea si hanno i logaritmi del seno e del coseno dell'arco riportato nella prima colonna. La quarta colonna riporta la differenza fra i logaritmi del seno e del coseno che corrisponde al logaritmo della tangente dell'arco di colonna 1.

Come esempio di costruzione delle tavole dei logaritmi di Nepero calcoliamo il logaritmo del seno di 30° e 16', pari a 5040253 da figura 10, tramite la tabella radicale e la relazione (3). Passando ai calcoli abbiamo:

$$2056,22 > L(5.040.253) - L_3(c_{3,68}) > 2055,79$$

$$L(5.040.253) = L_3(c_{3,68}) + (2056,22+2055,79)/2 = 6.851.288,16 ,$$

valore che differisce leggermente da quello calcolato da Nepero per la solita ragione sulla maggior precisione del calcolo computerizzato. In realtà vi è un secondo metodo di calcolo del logaritmo che utilizza, oltre la tabella radicale, la seconda e la prima tabella in forza della proprietà (2) al posto della relazione (3). Lo schema che segue mostra la successione dei calcoli da fare che portano comunque al medesimo risultato. I delta da sommare o sottrarre tengono conto che a numeri più alti corrispondono logaritmi più bassi.

| | | | |
|----|-------------------|--------------|--|
| a) | 5.040.253,0000000 | | $\text{sen}(30^\circ 16')$ |
| b) | 5.041.289,3855523 | 6.849.232,15 | numero più vicino in tabella 3 con suo logaritmo. $c_{3,68} L_3(c_{3,68})$ |
| c) | 0,9997944 | | rapporto fra i due numeri precedenti |
| d) | 0,9997900 | 2.100,01 | rapporto numeri b_{21}/b_0 e delta logaritmi dalla seconda tabella |
| e) | 5.041.311,6754518 | | numero associabile al rapporto 0,9997900 |
| f) | 0,9999956 | -44,00 | nuovo rapporto a_{44}/a_0 e delta logaritmi dalla prima tabella |
| g) | | 6.851.288,16 | logaritmo $L(\text{sen}(30^\circ 16'))$ |

Come laboriosità di calcolo i due metodi sono simili; il secondo presuppone il calcolo una tantum dei 50 rapporti b_i/b_0 e dei cento rapporti a_i/a_0 . Gli intervalli dei logaritmi della terza tabella, con una risoluzione di circa 5000 unità, sono tutti ricoperti della seconda tabella una risoluzione di circa 100 unità ($50 \times 100 = 5000$); la precisione del calcolo è poi ulteriormente spinta con l'uso della prima tabella con risoluzione quasi unitaria.

LA BASE 1/e DI NEPERO

E' noto, per definizione di logaritmo, che se $\text{Log}(x) - \text{Log}(y) = 1$ allora x/y è la base del logaritmo se i logaritmi crescono al crescere del numero. Per i logaritmi di Nepero abbiamo un fattore di scala 10^7 con logaritmi crescenti al decrescere dei seni; pertanto se $L(x) - L(y) = 10^7$ allora $y/x = 1/e$ per ogni x, y . Come esempio, dalla figura 11 che riporta gli estratti di due pagine delle tavole dei logaritmo di Nepero, possiamo calcolare:

$$L(\text{sen}(10^\circ 41')) - L(\text{sen}(30^\circ 16')) = 16.853.428 - 6.851.285 = 10.0021.143 = \text{circa } 10^7$$

$$\text{sen}(10^\circ 41') / \text{sen}(30^\circ 16') = 1.853.808 / 5.040.253 = 0,36780 = (1/e - 8 \cdot 10^{-5}) = \text{circa } 1/e$$

L'errore su $1/e$, trascinato anche dall'errore su 10^7 , è prossimo a 10^{-4} . I numeri (seni) delle tavole dei logaritmi di Nepero sono un insieme numerabile di elementi costruiti come progressione geometrica di ragione 0,9995 (Tabella 3) che possiamo ragionevolmente approssimare anche come $0,9999 = 1 - 1/10^4$. Se a partire da 1 inseriamo 10^4 elementi nell'insieme numerabile, l'ultimo elemento vale $(1 - 1/10^4)^{10000} = 0,3678$ che differisce da $1/e$ per un 10^{-4} come abbiamo appena verificato. Se dall'insieme numerabile descritto passiamo ad un insieme non numerabile con infiniti elementi possiamo scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \quad (6)$$

Osserviamo pertanto che con n tendente a infinito la granularità delle tavole dei logaritmi passa da 0,9995 ad un continuo 0,9999999999 La costante $1/e$ era ovviamente sconosciuta a Nepero che era arrivato a compilare

| Gr. 30 | | | | Gr. 10 | | | |
|--------|---------|------------|-------------|--------|---------|------------|-------------|
| min | Sinus | Logarithmi | Differentie | min | Sinus | Logarithmi | Differentie |
| 0 | 5000000 | 6931469 | 5493059 | 30 | 1822355 | 17024547 | 16855678 |
| 1 | 5002519 | 6926432 | 5486342 | 31 | 1825215 | 17008866 | 16839458 |
| 2 | 5005038 | 6921399 | 5479628 | 32 | 1828075 | 16993210 | 16823262 |
| 3 | 5007556 | 6916369 | 5472916 | 33 | 1830935 | 16977579 | 16807090 |
| 4 | 5010074 | 6911342 | 5466206 | 34 | 1833795 | 16961973 | 16790942 |
| 5 | 5012591 | 6906319 | 5459498 | 35 | 1836654 | 16946392 | 16774818 |
| 6 | 5015108 | 6901299 | 5452792 | 36 | 1839513 | 16930836 | 16758718 |
| 7 | 5017624 | 6896282 | 5446088 | 37 | 1842372 | 16915305 | 16742642 |
| 8 | 5020140 | 6891269 | 5439387 | 38 | 1845231 | 16899799 | 16726590 |
| 9 | 5022656 | 6886259 | 5432688 | 39 | 1848090 | 16884317 | 16710561 |
| 10 | 5025171 | 6881253 | 5425992 | 40 | 1850949 | 16868860 | 16694557 |
| 11 | 5027686 | 6876250 | 5419298 | 41 | 1853808 | 16853428 | 16678577 |
| 12 | 5030200 | 6871259 | 5412605 | 42 | 1856666 | 16838021 | 16662621 |
| 13 | 5032714 | 6866254 | 5405915 | 43 | 1859524 | 16822638 | 16646688 |
| 14 | 5035227 | 6861261 | 5399227 | 44 | 1862382 | 16807280 | 16630779 |
| 15 | 5037740 | 6856271 | 5392541 | 45 | 1865240 | 16791946 | 16614893 |
| 16 | 5040253 | 6851285 | 5385858 | 46 | 1868098 | 16776636 | 16599030 |
| 17 | 5042765 | 6846302 | 5379177 | 47 | 1870956 | 16761351 | 16583191 |
| 18 | 5045277 | 6841323 | 5372499 | 48 | 1873813 | 16746090 | 16567375 |
| 19 | 5047788 | 6836347 | 5365822 | 49 | 1876670 | 16730853 | 16551583 |
| 20 | 5050299 | 6831374 | 5359147 | 50 | 1879527 | 16715640 | 16535814 |
| 21 | 5052809 | 6826405 | 5352475 | 51 | 1882384 | 16700451 | 16520068 |
| 22 | 5055319 | 6821439 | 5345805 | 52 | 1885241 | 16685286 | 16504345 |
| 23 | 5057829 | 6816476 | 5339137 | 53 | 1888098 | 16670145 | 16488645 |
| 24 | 5060338 | 6811516 | 5332471 | 54 | 1890954 | 16655028 | 16472958 |
| 25 | 5062847 | 6806560 | 5325808 | 55 | 1893810 | 16639934 | 16457313 |
| 26 | 5065355 | 6801607 | 5319147 | 56 | 1896666 | 16624864 | 16441681 |
| 27 | 5067863 | 6796657 | 5312488 | 57 | 1899522 | 16609817 | 16426072 |
| 28 | 5070370 | 6791710 | 5305831 | 58 | 1902378 | 16594794 | 16410486 |
| 29 | 5072877 | 6786767 | 5299177 | 59 | 1905234 | 16579794 | 16394922 |
| 30 | 5075384 | 6781827 | 5292525 | 60 | 1908090 | 16564818 | 16379381 |

Fig. 11 – Estratti della tavola dei logaritmi di Nepero per 30° e 10° [Nepero, 1614]

le sue tavole dei logaritmi a partire dalla definizione cinematica di progressione aritmetica e di progressione geometrica mostrate in figura 3 che, in tempi successivi, si poterono scrivere in forma differenziale come [Hobson, 1914]:

$$\frac{dL}{dt} = V_0 \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{V_0}{10^7} N$$

Dal rapporto di queste due velocità e successiva integrazione abbiamo:

$$\frac{dL}{dN} = -\frac{10^7}{N}$$

$$L = -10^7 \int \frac{1}{N} dN = -10^7 \log_e N + C = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} N + C$$

Da questo possiamo dire che Il logaritmo in base 1/e di un numero varia come rapporto fra le velocità istantanee di due punti mobili che, partiti con la stessa velocità V₀, uno continua con moto rettilineo uniforme e l'altro rallenta con una velocità che, in ogni istante, è proporzionale alla distanza dal prefissato punto di arrivo (posto ad una distanza pari a 10⁷ dal punto di partenza).

L'enunciato riprende con altre parole ciò che Nepero aveva scritto, a completamento delle sue definizioni di grandezze che variano aritmeticamente e geometricamente, come:

Art.25: Thus the moving point approaching the fixed point geometrically has its velocities as the distances from the fixed point [Nepero, 1619]

LE BASI NORMALIZZATE A 1

L'opera sui logaritmi pubblicata da Nepero nel 1614 suscitò lo stupore di Henry Briggs, professore di geometria a Londra, che decise di incontrare personalmente Nepero in Scozia nell'estate del 1615. Si discusse sulla convenienza di assegnare 0 al logaritmo di 1, al posto dell'originale 10.000.000, e 1 al logaritmo di 10. In questo modo numeri e logaritmi assumevano verso crescente concorde mentre l'ordine di grandezza dei logaritmi diventava più intuibile con le potenze di dieci. Nella seconda visita dell'estate 1616 Briggs illustrò a Nepero l'impostazione dei nuovi logaritmi decimali.

L'anno successivo Nepero moriva mentre Briggs pubblicava i suoi "Logarithmorum chilias prima" con gli spunti discussi con Nepero. Briggs diffuse ampiamente l'uso dei suoi logaritmi in base 10 mentre l'intento di convertire i logaritmi di Nepero dalla base $1/e$ alla base e senza il fattore di scala 10^7 non ebbe seguito immediato. Dalle considerazioni fin qui esposte possiamo enunciare e confrontare fra loro il significato cinematico dei logaritmi riformulati con le nuove basi che assegnano 0 al logaritmo di 1.

- a) Il logaritmo in **base $1/e$** di un numero varia come il rapporto fra le velocità istantanee di due punti L e N, mobili su una retta, che partono insieme con la stessa velocità V_0 . Il primo prosegue a velocità costante V_0 , il secondo **frena** per arrestarsi dopo aver percorso uno **spazio unitario** con una velocità che, in ogni istante, è uguale a V_0 per la distanza dal punto di **arresto**. L prosegue fino a meno infinito, N riparte verso più infinito.

$$\frac{dL}{dt} = V_0 \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{V_0}{1}N \quad \frac{dL}{dN} = -\frac{1}{N}$$

- b) Il logaritmo in **base e** di un numero varia come il rapporto fra le velocità istantanee di due punti L e N, mobili su una retta, che partono insieme. Il primo con velocità costante V_0 , il secondo **accelera** da fermo fino raggiunge la velocità V_0 dopo aver percorso uno **spazio unitario** con una velocità che, in ogni istante, è uguale a V_0 per la distanza dal punto di **partenza**. Entrambi proseguono fino a più infinito.

$$\frac{dL}{dt} = V_0 \quad \frac{dN}{dt} = \frac{V_0}{1}N \quad \frac{dL}{dN} = \frac{1}{N}$$

- c) Il logaritmo in **base 10** di un numero varia come il rapporto fra le velocità istantanee di due punti L e N, mobili su una retta, che partono insieme. Il primo con velocità costante V_0 , il secondo **accelera** da fermo fino raggiunge la velocità V_0 dopo aver percorso uno **spazio pari a 0,4342944 unità** con una velocità che, in ogni istante, è uguale a V_0 per la distanza dal punto di **partenza**. Entrambi proseguono fino a più infinito.

$$\frac{dL}{dt} = V_0 \quad \frac{dN}{dt} = \frac{V_0}{k}N \quad \frac{dL}{dN} = \frac{k}{N} \quad k = \frac{1}{\ln 10} = 0,4342944 \dots$$

LA COSTANTE e

A questo punto ci sentiamo di affermare che la nostra curiosità iniziale per una rappresentazione figurata della costante “ e ” può essere ben soddisfatta dalla descrizione cinematica b) di logaritmo in base “ e ” anche se la definizione più accreditata, formulata da Jakob Bernoulli nel 1690, rimane il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828182845905... \quad (7)$$

che come genesi assomiglia a quanto abbiamo già concluso scrivendo la relazione (6). E’ oggi facile verificare numericamente che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong e - \frac{1}{n} \quad (8)$$

con $1/n$ errore per difetto rispetto la costante “ e ” che si annulla per $n=\infty$. Se n è una potenza di 10 con la relazione (7) possiamo affermare che il risultato della potenza differisce dalla costante “ e ” dopo n cifre significative. Ad esempio per $n=1.000$ dopo 2,71, per $n=100.000$ dopo 2,7182 e così via. Proviamo ora a costruire per esercizio una tavola dei logaritmi abbinando ad una progressione geometrica di ragione 1,001 una progressione aritmetica di ragione 0,001 partendo con indice $n=0$. La figura 12 mostra gli elementi salienti oggi banalmente calcolabili con un foglio elettronico.

| | | | |
|------------|---------------------------------|---------------|---------------------------------|
| a_0 | $= (1+1/10^3)^0 = 1,00000$ | $L(a_0)$ | $= (1/10^3) \cdot 0 = 0$ |
| a_1 | $= (1+1/10^3)^1 = 1,00100$ | $L(a_1)$ | $= (1/10^3) \cdot 1 = 0,001$ |
| a_2 | $= (1+1/10^3)^2 = 1,00200$ | $L(a_2)$ | $= (1/10^3) \cdot 2 = 0,002$ |
| | | | |
| | | | |
| a_{999} | $= (1+1/10^3)^{999} = 2,71421$ | $L(a_{999})$ | $= (1/10^3) \cdot 999 = 0,999$ |
| a_{1000} | $= (1+1/10^3)^{1000} = 2,71692$ | $L(a_{1000})$ | $= (1/10^3) \cdot 1000 = 1$ |
| a_{1001} | $= (1+1/10^3)^{1001} = 2,71964$ | $L(a_{1001})$ | $= (1/10^3) \cdot 1001 = 1,001$ |
| | | | |
| | | | |
| a_{1999} | $= (1+1/10^3)^{1999} = 7,37430$ | $L(a_{1999})$ | $= (1/10^3) \cdot 1999 = 1,999$ |
| a_{2000} | $= (1+1/10^3)^{2000} = 7,38168$ | $L(a_{2000})$ | $= (1/10^3) \cdot 2000 = 2$ |
| a_{2001} | $= (1+1/10^3)^{2001} = 7,38906$ | $L(a_{2001})$ | $= (1/10^3) \cdot 2001 = 2,001$ |
| | | | |
| | | | |
| a_{2999} | $= (1+1/10^3)^{2999} = 20,0354$ | $L(a_{2999})$ | $= (1/10^3) \cdot 2999 = 2,999$ |
| a_{3000} | $= (1+1/10^3)^{3000} = 20,0555$ | $L(a_{3000})$ | $= (1/10^3) \cdot 3000 = 3$ |
| a_{3001} | $= (1+1/10^3)^{3001} = 20,0755$ | $L(a_{3001})$ | $= (1/10^3) \cdot 3001 = 3,001$ |

Fig. 12 – Esempio di tavola dei logaritmi a base 2,71692393

Poiché nell’esempio abbiamo scelto una ragione aritmetica pari a $1/1000$ raggiungiamo l’unità con il logaritmo del millesimo elemento della progressione geometrica con la conseguenza che:

$$L(a_{n+1000}) - L(a_n) = 1 \quad \text{per ogni } n \text{ tale che } 0 \leq n \leq 2001 \quad (9)$$

$$a_{n+1000}/a_n = 2,71692 < e \quad \text{per ogni } n \text{ tale che } 0 \leq n \leq 2001 \quad (10)$$

In accordo con la relazione (7), la relazione (9) identifica la base della tavola dei logaritmi di figura 12 che è un numero minore di “e” perché abbiamo raggiunto il logaritmo 1 con soli mille elementi a_i . Riducendo nelle progressioni il termine 1/1000 fino ad un valore prossimo a zero arriveremo ad infiniti elementi fra 1 ed “e” con la base che diventa uguale a “e” in accordo con la definizione (6).

Nell’esempio di figura 12 abbiamo 1000 elementi fra 1 e 2,71692, altri mille elementi fra 2,71692 e 2,71692² e infine ulteriori mille elementi fra 2,71692² e 2,71692³ per un totale 3·1000 elementi. Passando al limite appena descritto si arriva ad totale di $3 \cdot \infty$ elementi. A chiarimento di quest’ultimo punto scriviamo la tabella di figura 12, senza la prima e l’ultima riga, in forma algebrica moderna come tre insiemi finiti e numerabili:

$$\begin{aligned} A &= \{a_1 = L(a_1); \quad a_2 = L(a_2); \dots \quad a_{1000} = L(a_{1000})\} \\ B &= \{b_1 = L(a_{1001}); \quad b_2 = L(a_{1002}); \dots \quad b_{1000} = L(a_{2000})\} \\ C &= \{c_1 = L(a_{2001}); \quad c_2 = L(a_{2002}); \dots \quad c_{1000} = L(a_{3000})\}. \end{aligned}$$

I tre insiemi A, B e C sono equipotenti perché tutti i loro elementi sono in corrispondenza biunivoca con la funzione biiettiva

$$f: b_i \rightarrow a_i + 1 \quad c_i \rightarrow b_i + 1 \quad (11)$$

che rappresenta la nota proprietà sulla “caratteristica” dei logaritmi e definisce la base degli stessi. Con la riduzione verso zero del termine 1/1000 i tre insiemi A, B e C passano dalla potenza del numerabile a quella del continuo rimanendo tuttavia equipotenti fra loro per la validità della funzione (11).

Jakob Bernoulli scoprì la costante “e” indagando sugli interessi composti in risposta ad una questione di merito che gli era stata posta. E’ oggi noto che il montante M di un capitale C , investito con interesse annuale “ r ” ricalcolato “ n ” volte per anno su un periodo di “ t ” anni è dato dalla relazione $M=C(1+r/n)^{nt}$. Con l’attrattiva che riveste il numero 1 per un matematico Bernoulli generalizzò il problema come $M=(1+1/n)^n$ considerando un capitale unitario investito per un anno con interesse del 100%.

Il risultato è 2 se si fa il computo a fine anno, sale a 2,25 per computo semestrale, arriva a $(1+1/12)^{12} = 2,613$ con computo mensile per attestarsi a 2,7182 con computo giornaliero. Passando al limite con computo continuo, istante dopo istante, si arriva alla formulazione (6) attribuita a Bernoulli. Praticamente si può dire che nel lasco di tempo nel quale un generico capitale investito raddoppia, se computato ad interesse semplice, sale fino a 2,718 volte se computato ad interesse composto continuo, qualunque sia il tasso di interesse annuale.

Da ultimo non possiamo non considerare la particolarità del numero “e” come base della funzione esponenziale $y=e^x$ che coincide con la sua derivata $dy/dx=e^x$. Questa proprietà è la ragione base della sua importanza in numerose applicazioni. I passaggi che seguono, esplorati decenni dopo da Eulero nei suoi studi sulla funzione esponenziale $y=a^x$, spiegano la ragione della particolarità a partire dalla definizione di derivata per finire con la sostituzione $h=1/n$ che conduce alla base “e”.

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$\frac{a^h - 1}{h} = 1 \quad a^h = h + 1 \quad a = \sqrt[h]{h + 1} = (h + 1)^{1/h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \quad \text{per} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1)^{1/h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

CONCLUSIONI

Il proposito iniziale di trovare una rappresentazione figurata per la costante “e” risulta soddisfatto dai modelli cinematici di Nepero, dagli approfondimenti sul concetto di base di un logaritmo e infine dal limite introdotto da Bernoulli. Lo scrivente appartiene all’ultima generazione di giovani che negli anni “70 hanno utilizzato intensamente le tavole dei logaritmi e il regolo calcolatore prima dell’avvento delle calcolatrici scientifiche tascabili che hanno definitivamente soppiantato tabelle e regoli. Le nuove generazioni potrebbero prendere spunto da questa memoria per ricreare con l’agilità di un foglio elettronico le tabelle di Nepero, verificarne le proprietà, dimostrare che una terza tabella senza le interruzioni delle 69 sottotabelle è congruente e toccare con mano perché Nepero non sia sceso al di sotto dei trenta gradi con la terza tabella.

Riferimenti

- [1] Ioanne Nepero – 1614 – *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* – Edinburgh
- [2] John Napier – 1619 – *The Construction of the Wonderful Canon Logarithms* – Edinburgh
- [3] E.W. Hobson – 1914 - *John Napier and the invention of Logarithms* – Cambridge, University Press
- [4] Denis Roegel – 2012 - *Napier’s ideal construction of the logarithms* – Nancy, Loria Lab